

# Halb-, Drittel- und $n$ -tel Primzahlen

## 55. Berliner Landesolympiade

Mathematikolympiaden in Berlin e.V.  
<http://mathematikolympiaden-berlin.de>

Der Verein „Mathematikolympiaden in Berlin e.V.“ wurde im März 1995 gegründet.

Die Olympiade wird an der Heinrich-Hertz-Oberschule und dem Lessing-Gymnasium ausgerichtet.

Wir danken diesen Schulen, den Lehrerinnen und Lehrern, die die Besten der schulischen Wettbewerben zum Landeswettbewerb schicken und schließlich den vielen Korrektoren, die dafür sorgen, dass am Sonntag nach der Olympiade alle Schülerinnen und Schüler ihre Arbeit in die Hand bekommen.

Wir benötigen dazu auch Ihre Hilfe und freuen uns über jeden neuen Unterstützer.

## Primzahlen

Sie sind die einfachsten Zahlen, denn sie haben nur einen Teiler.

Aber mit ihnen sind die schwierigsten Probleme verbunden.

## Die Goldbachsche Vermutung

Jede ganze Zahl (größer als 5) ist die Summe dreier Primzahlen.

Christian Goldbach an Leonhard Euler 1742

Jede gerade Zahl (größer als 3) ist die Summe zweier Primzahlen.

Antwort von Leonhard Euler

## Die Goldbachsche Vermutung

Jede gerade Zahl (größer als 2) ist die Summe zweier Primzahlen.

$$6 = 3 + 3$$

$$8 = 5 + 3$$

$$12 = 7 + 5$$

$$54 = 37 + 17$$

$$100 = 53 + 47$$

## Die Goldbachsche Vermutung

Wie viele Goldbach-Zerlegungen gibt es eigentlich für eine gerade Zahl?

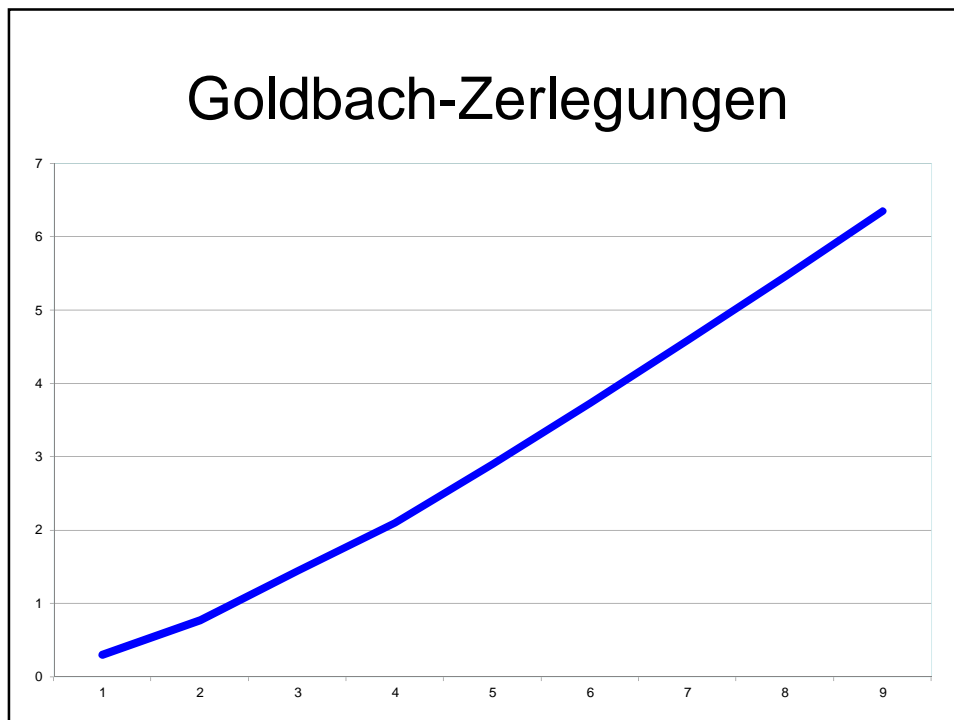
$$10 = 7 + 3$$

$$100 = 97 + 3$$

$$100 = 53 + 47$$

1.000 hat 28 Zerlegungen

10.000 hat 127 Zerlegungen



## Zerlegungen ungerader Zahlen

Jede ungerade Zahl ist die Summe dreier Primzahlen.

Das ist die schwache Goldbachsche Vermutung. Der Beweis ist von 1997.

## Halbe und $n$ -tel Primzahlen

Eine beliebige Zahl heißt halbe Primzahl, wenn sie nur zwei echte Teiler hat, also das Produkt aus zwei Primzahlen ist.

Eine beliebige Zahl heißt  $n$ -tel Primzahl, wenn sie das Produkt aus genau  $n$  Primzahlen ist.

## Goldbach und 9-tel Primzahlen

Jede genügend große gerade Zahl lässt sich als Summe von zwei 9-tel Primzahlen darstellen.

Der Beweis ist aus dem Jahr 1919 (V. Brun)

Seit 1979 wissen wir, dass man genügend große gerade Zahlen in die Summe einer Primzahl und einer halben Primzahl zerlegen kann.

## Goldbachsche Summe

Jede ungerade Zahl lässt sich als Summe einer Primzahl und dem Doppelten einer Quadratzahl darstellen:

$$11 = 3 + 2 \cdot 2^2$$

$$19 = 11 + 2 \cdot 2^2$$

Euler hatte das für Zahlen bis 1000 bestätigt, aber nicht bewiesen.

## Goldbachsche Summe

Diese Vermutung ist auch falsch.

Wolfgang Blum: „Goldbach und die Zwillinge“

<https://www.mathematik.de/ger/presse/ausdenmitteilungen/artikel/mdmv-18-4-222-1.pdf>

So haben 5777 und 5993 keine Zerlegungen.

Achtung: 137, 227 und 997 haben auch keine!

## Goldbachsche Summe

Finde eine noch kleinere ungerade Zahl ohne eine Zerlegung.



Wir danken allen Spendern und  
Unterstützern der Berliner  
Mathematikolympiaden

Mathematikolympiaden in Berlin e.V.  
<http://mathematikolympiaden-berlin.de>

Verein Mathematikolympiaden in Berlin e.V.  
Institut für Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin,  
Unter den Linden 6, 10099 Berlin  
IBAN: DE80 1009 0000 5745 4960 00 BIC: BEVODEBBXXX