

Warum man besser sein kann als
andere und trotzdem nie der Beste
wird

47. Berliner Landesolympiade

Mathematikolympiaden in Berlin e.V.

<http://mathematikolympiaden-berlin.de>

Der Verein Mathematikolympiaden in Berlin

Um die Durchführung der Berliner Landesolympiade zu gewährleisten, wurde 1995 der Verein gegründet.

Ziel des Vereins ist es, Landeswettbewerbe für mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler durchzuführen.

Der Verein ist gemeinnützig und wird durch Spenden finanziert.

2007 wurde der Verein unterstützt durch:

Bad & Pool Wildau

Merck KGaA Darmstadt

Rohde und Schwarz SIT Berlin

Intranetz GmbH Berlin

Stellvertretend für die Einzelspender möchten wir den Arbeitskreis Berliner Senioren nennen und uns bei ihm recht herzlich für die finanzielle Unterstützung bedanken.

Die 34. Berliner Seniorenwoche findet übrigens am 21. Juni auf dem Breitscheidplatz statt.

Ihr Motto lautet

"Die Jungen von Heute sind die Alten von Morgen".

<http://www.senioren-berlin.de>

Besser sein schafft Ordnung

A ist kleiner als B

X ist länger als Y

Die Besten sind die, die jedem Vergleich mit den anderen stand halten.

Unendliche Mengen haben manchmal beste Elemente aber manchmal auch nicht:

Jede (nicht-leere) Menge natürlicher Zahlen hat eine kleinste.

Keine unendliche Menge natürlicher Zahlen hat eine größte.

Eine Strategie beim Münzwurf

Eine Münzwurf-Folge beschreiben wir durch Z (Zahl) und
Wappen (W): Z W W Z Z Z W W W Z

Zwei Spieler wählen sich jeder eine Folge bestimmter
Länge (größer als drei)

Z W W Z Z Z W W W Z

Z W Z W Z W Z W Z W

und werfen eine Münze.

Es gewinnt der, dessen Folge zuerst auftritt.

Welche Folge ist die Beste?

Es gibt keine beste Folge, aber zu jeder Folge gibt es eine bessere!

Ein Beispiel:

Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z

Besser als sie ist die Folge:

W Z Z Z Z Z Z Z Z Z

Das gilt auch allgemein

Zu jeder Folge

$$M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 M_6 \dots M_{k+1}$$

gibt es eine bessere:

$$\overline{M}_2 M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 M_6 \dots M_k$$

Noch ein Beispiel

Am 17.8.2007 spielt:

Karlsruher SC gegen Hannover 96 1:2

Am 6.10.2007 spielt:

Schalke 04 gegen Karlsruher SC 0:2

Welches Ergebnis gab es am 24.11.2007 beim Spiel:

Hannover 96 gegen Schalke 04 0:3

Und noch ein Beispiel

Wir betrachten Würfel, auf denen verschiedene Zahlen stehen.

Nicht 1, 2, 3, 4, 5, 6

sondern zum Beispiel:

1, 2, 16, 17, 18, 19

Ein solcher Würfel "verliert" gegen einen Würfel mit den Zahlen: 3, 4, 5, 20, 21, 22.

Welcher Würfel ist besser?

(1, 2, 16, 17, 18, 19) verliert gegen (3, 4, 5, 20, 21, 22)

Bei den 36 Paaren

(1, 3) (1, 4) (1, 5) (1,20) (1,21) (1,22)

(2, 3) (2, 4) (2, 5) (2,20) (2,21) (2,22)

(16, 3) (16, 4) (16, 5) (16,20) (16,21) (16,22)

(17, 3) (17, 4) (17, 5) (17,20) (17,21) (17,22)

(18, 3) (18, 4) (18, 5) (18,20) (18,21) (18,22)

(19, 3) (19, 4) (19, 5) (19,20) (19,21) (19,22)

Welcher Würfel ist besser?

(1, 2, 16, 17, 18, 19) verliert gegen (3, 4, 5, 20, 21, 22)

Bei den 36 Paaren verliert der **erste** und der **zweite**:

(1, 3) (1, 4) (1, 5) (1,20) (1,21) (1,22)

(2, 3) (2, 4) (2, 5) (2,20) (2,21) (2,22)

(16, 3) (16, 4) (16, 5) (16,20) (16,21) (16,22)

(17, 3) (17, 4) (17, 5) (17,20) (17,21) (17,22)

(18, 3) (18, 4) (18, 5) (18,20) (18,21) (18,22)

(19, 3) (19, 4) (19, 5) (19,20) (19,21) (19,22)

Noch mehr Würfel

(1, 2, 16, 17, 18, 19) verliert gegen (3, 4, 5, 20, 21, 22)

(3, 4, 5, 20, 21, 22) verliert gegen (6, 7, 8, 9, 23, 24)

(6, 7, 8, 9, 23, 24) verliert gegen (10, 11, 12, 13, 14, 15)

(10, 11, 12, 13, 14, 15) verliert gegen (1, 2, 16, 17, 18, 19)

Transitive Ordnung

Eine "besser"-Ordnung heißt transitiv, wenn aus

A ist besser als B

und

B ist besser als C

auch

A ist besser als C

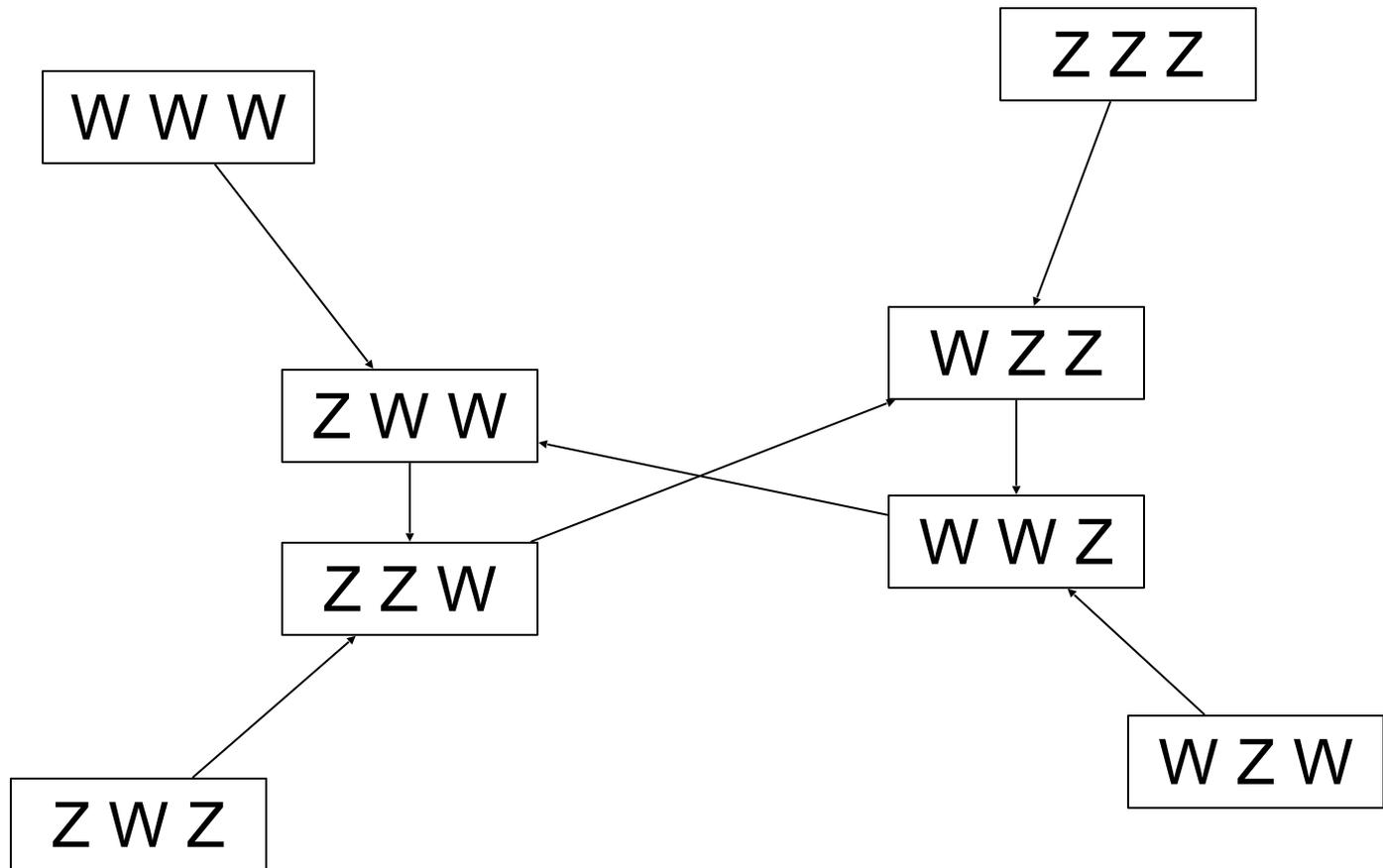
Folgt.

Transitive Ordnung

Die "kleiner"-Ordnung von Zahlen ist transitiv

Die "besser"-Ordnungen für die Z-W-Folgen und die Würfel sind es nicht.

"besser"-Ordnung der ZW-Folgen



Vergleiche die Würfel

(1, 2, 16, 17, 18, 19)

(3, 4, 5, 20, 21, 22)

(6, 7, 8, 9, 23, 24)

(10, 11, 12, 13, 14, 15)

Drei Würfel gehen auch!

(2, 2, 4, 4, 9, 9)

(1, 1, 6, 6, 8, 8)

(3, 3, 5, 5, 7, 7)

Der Gewinn ist nur nicht so deutlich:

(2, 2, 4, 4, 9, 9) gewinnt gegen (1, 1, 6, 6, 8, 8)

in 20 von 36 Fällen

(3, 4, 5, 20, 21, 22) gegen (1, 2, 16, 17, 18, 19)

jedoch in 24 von 36 möglichen.

Literaturhinweise

Die Würfel wurden erstmals von **Bradley Efron** beschrieben:

http://en.wikipedia.org/wiki/Nontransitive_dice

Für den Münzwurf findet man eine gute Beschreibung unter

<http://www.qbyte.org/puzzles/puzzle02.html>

beim 13. Puzzle (coin triplets).